[FGN An2] Exos de maths Oraux X-ENS - Francinou p.187

Partition d'un entier à parts fixées

L102 L126 L144 L180 L223 L245 L243

Soit $(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{N}\setminus\{0\}^k$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $(a_1,\dots,a_k)$ premiers entre eux, soit $n\in\mathbb{N}^*$ et la suite

$$\left(u_n := \operatorname{card}\left(\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid a_1x_1+\dots+a_kx_k=n\}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Alors :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1\times\dots\times a_k}\times\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Preuve : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k$ tq : $a_1x_1+\dots+a_kx_k=n$.

Pour tout $i\in[\![1;k]\!]$, les séries $\sum_{x_i\in\mathbb{N}} z^{x_ia_i}$ ont toutes pour rayon de convergence 1. Considérons le produit de Cauchy de ces k séries entières.

Soit $|z|<1$ et $f(z)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{x_i=0}^{+\infty} z^{x_ia_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-z^{a_i}}$.

On a : $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k\\ a_1x_1+\dots+a_kx_k=n}} 1\right)z^n=\sum_{n\in\mathbb{N}} u_nz^n$.

Il s'agit alors de développer la première expression de f en série entière pour identifier les u_n.

La fonction f est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines a_i-èmes de l'unité.

Puisque les (a_i) sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe $(u_1,\dots,u_k)\in\mathbb{N}^k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_iu_i=1$.

Soit alors $\omega\in\mathbb{U}$ tel que : $\omega^{a_1}=\dots=\omega^{a_k}=1$ ← on montre que si ω se fait annuler par des puissances a_i, alors c'est forcément $\omega=1$.

Alors $\omega=\omega^{\sum_{i=1}^k a_iu_i}=\prod_{i=1}^{k}(\omega^{a_i})^{u_i}=1$.

Ainsi, le SEUL pôle 1 est de multiplicité k.

Soit $\mathcal{P}=\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f avec $\omega_1=1$.

Il existe alors $(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le k-1}}\in\mathbb{C}^{p(k-1)}$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $|z|<1$,

$$f(z)=\frac{\alpha}{(1-z)^k}+\sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le k-1}}\frac{c_{i,j}}{(\omega_i-z)^j}=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_nz^n$$

Soit $\omega\in\mathcal{P}$ et $j\in\mathbb{N}^*$. Alors $z\mapsto\frac{1}{(\omega-z)^j}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1, ses coefficients s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série entière de $\frac{1}{\omega-z}$.

Or pour $|z|<1$, $\frac{1}{\omega-z}=\frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{\omega^{n+1}}$.

Pour $j\le k-1$, $\frac{(j-1)!}{(\omega-z)^j}=\sum_{n=j-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-j+1)!}\times\frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n+j-1)!}{n!}\times\frac{z^n}{\omega^{n+j}}$

d'où : $\frac{1}{(\omega-z)^j}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{n+j-1}{n}\frac{z^n}{\omega^{n+j}}$

Ainsi, $f(z)=\alpha\sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{n+k-1}{n}\frac{z^n}{1^{n+k}}+\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le k-1}}c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\frac{z^n}{\omega_i^{n+j}}\right)$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left[\alpha\binom{n+k-1}{n}+\sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le k-1}}c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\omega_i^{-(n+j)}\right]}_{u_n}z^n$$

On a ainsi trouvé une autre expression des u_n. Trouvons maintenant un équivalent en $+\infty$.

Par ailleurs, $\binom{n+j-1}{n}=\frac{(n+j-1)\times\dots\times(n+1)}{(j-1)!}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$

Ainsi, lorsque $n\to+\infty$, les termes $\binom{n+j-1}{n}$ pour $j\in[\![1;k-1]\!]$ sont négligeables devant $\binom{n+k-1}{n}$

Ainsi, $u_n\sim\alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

Il ne reste plus qu'à trouver α.

$$(1-z)^kf(z)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1-z}{1-z^{a_i}}=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{a_i-1}z^j\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+z+\dots+z^{a_i-1}}$$

$$(1-z)^kf(z)=\alpha+(1-z)^k\sum_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le k-1}}\frac{c_{i,j}}{(\omega_i-z)^j}$$

En évaluant les membres de droite en $z=1$,

$$\alpha=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1\times\dots\times a_k}$$

Donc : $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{a_1\times\dots\times a_k}\times\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

Temps:
13,47' speed tableau

Temps:
12' 35" speedless